RESUME DU COURS

Définition : La fonction logarithme népérien, noté ln, est la primitive sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1, de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$. On donc, pour tout réel x >0, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Conséquence : ln est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout réel strictement positive on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ de plus ln(1) = 0.

Propriétés algébriques : pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\ln(a^n) = n \ln a (n \in \mathbb{Z})$ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln a$ **Limites :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ Pour tous entiers naturels non nuls n et m, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^n(x)}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^m \ln^n(x) = 0$

Equations et inéquations : Pour tous réels x et x′ strictement positifs, on a :

$\ln x = \ln x' \Leftrightarrow x = x'$ $\ln x < \ln x' \Leftrightarrow x < x'$ En particulier : $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ et $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Dérivée de ln(u) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$, pour tout réel x dans I alors ln(u) est dérivable sur I et in a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ pour tout réel x dans I

Théorème : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivables sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Corollaire : Si u est une fonction dérivable pour tout réel x dans I telle que $u(x) \neq 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $\ln(|u|) + c$ où c est une constante réelle.

LES EXERCICES

Exercice N°1 :

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse :

1. L'ensemble de définition de l'équation : $\ln(x+3) = \ln(x^2 - 9)$ est :

a. {-3 ;3 } b.]3,+∞[c.]-3 ;3[d. $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x) =$ a. 0 b. +∞ c. -∞

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$ a. 0 b. 1 c.+∞

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x-1}{6x+2}\right) =$ a.-ln2 b. 0 c. +∞

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x} =$ a.1 b.+ ∞ c. 0

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) =$ a.+ ∞ b. 0 c. 1

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...